Ley de Gauss

La ley de Gauss sirve para el campo de una distribución de carga en una línea recta o en una hoja plana.

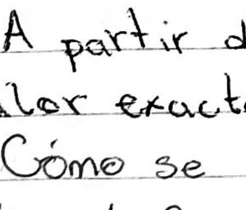
- Es un enunciado fundamental acerca de la relación que hay entre las cargas eléctricas y los campos eléctricos.
- Ayuda a entender cómo se distribuye la carga en los cuerpos conductores.
- Es una relación entre el campo en todos los puntos de la superficie y la carga total que ésta encierra.

Carga y flujo eléctrico

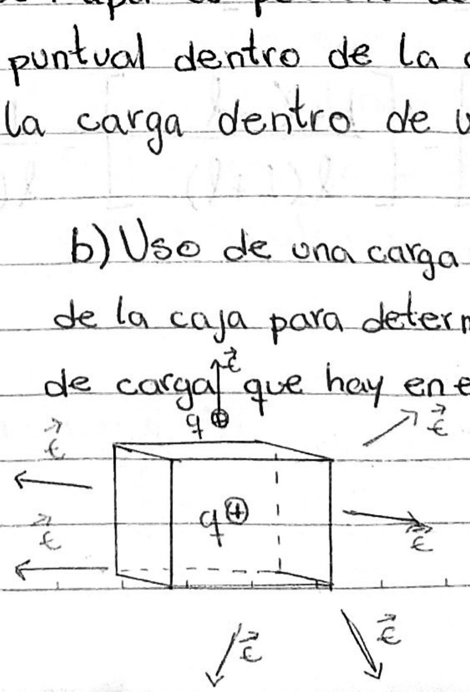
- Existe una relación alternativa entre las distribuciones de carga y los campos eléctricos.
- Como sabemos que una distribución de carga produce un campo eléctrico y que éste ejerce una fuerza sobre una carga de prueba, se mueve una carga de prueba q_0 en torno a las proximidades de la caja.
- Con la medición de la fuerza $\vec{F}$ experimentada por la carga de prueba en diferentes posiciones, se elabora un mapa tridimensional del campo eléctrico $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ fuera de la caja.
- A partir de los detalles del mapa es posible determinar el valor exacto de la carga puntual dentro de la caja.

¿Cómo se podría medir la carga dentro de una caja sin abrirla?

a) Caja que contiene una cantidad desconocida de carga.

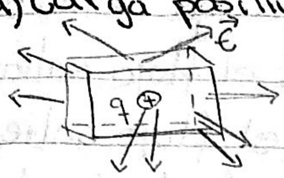


b) Uso de una carga de prueba fuera de la caja para determinar la cantidad de carga que hay en el interior



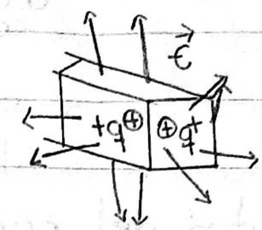
El campo eléctrico sobre la superficie de las cajas contiene

a) Carga positiva dentro de la caja.



flujo hacia fuera

b)

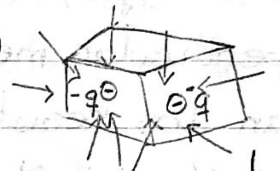


Cargas positivas dentro de la caja, flujo hacia fuera.

c)

Carga negativa dentro de la caja, flujo hacia dentro.

d)



Cargas negativas dentro de la caja, flujo hacia dentro

El flujo eléctrico y la carga encerrada

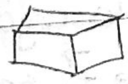
→ En los que los vectores de campo eléctrico apuntan hacia fuera de la superficie, existe un FLUJO ELÉCTRICO SALIENTE.

→ Los vectores $\vec{E}$ se dirigen a la superficie, existe FLUJO ELÉCTRICO ENTRANTE.

→ El flujo eléctrico neto a través de la superficie de la caja es directamente proporcional a la magnitud de la carga neta encerrada en la caja

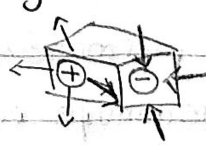
Tres casos en los que hay una carga neta cero en el interior de la caja, y no hay flujo eléctrico a través de la superficie de está.

a) Caja vacía con $\vec{E} = 0$



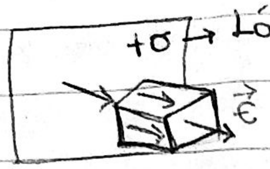
$\vec{E} = 0$

b) Caja que contiene una carga puntual positiva y una negativa de igual magnitud.



Carga neta = 0
flujo entrante cancela flujo saliente

c) Caja vacía inmersa en un campo eléctrico uniforme



No hay carga dentro de la caja; el flujo entrante cancela el flujo saliente

→ La magnitud del campo eléctrico de una carga puntual disminuye con la distancia de acuerdo con $1/r^2$

? → El flujo eléctrico se define como sigue: con respecto a cada cara de la caja, hay que calcular el producto de la componente perpendicular media de $\vec{E}$ por el área de esa cara; luego se suman los resultados de todas las caras de la caja. Con esta definición, el flujo eléctrico neto debido a una sola carga puntual dentro de la caja es independiente del tamaño de ésta y sólo depende de la carga neta en el interior

→ Una superficie cerrada en forma de caja rectangular y distribuciones de carga constituidas por cargas puntuales o láminas infinitas con carga, se tiene lo siguiente: 1- El hecho de que el flujo neto hacia el exterior o hacia el interior de una superficie cerrada depende del signo de la carga encerrada.

2- Las cargas afuera de la superficie no provocan un flujo eléctrico neto através de la superficie

3- El flujo eléctrico neto es directamente proporcional a la cantidad neta de carga contenida dentro de la superficie, pero es independiente del tamaño de la superficie cerrada.

• La duplicación de la carga ocasiona que la magnitud de $\vec{E}$ se duplique, lo que también duplica el flujo eléctrico através de la superficie

• Si la carga permanece igual, pero las dimensiones de la caja se duplican, el flujo permanece sin cambio. La magnitud de $\vec{E}$ sobre la superficie disminuye en un factor de 1/4, pero el área a través de la que "fluye" $\vec{E}$ aumenta en un factor de 4.

Cálculo del flujo eléctrico......

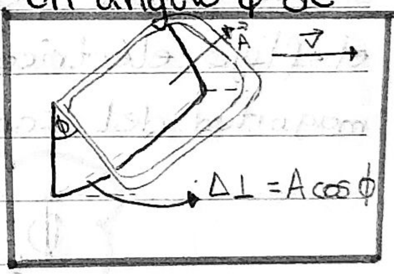
→El flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada es directamente proporcional a la carga neta en el interior de esa superficie.

Flujo: Analogía del fluido ~~d~~en movimiento

→Cuando el área es perpendicular a la velocidad del flujo $\vec{v}$ y la velocidad de flujo es la misma en todos los puntos del fluido, la tasa de flujo volumétrico dV/dt es el área multiplicada por la velocidad del flujo v.

$$\frac{dV}{dt} = vA$$

→Cuando el rectángulo se encuentra inclinado un ángulo ϕ de manera que su cara no es perpendicular a $\vec{v}$, el área que se toma en cuenta es la de la silueta que se genera al mirar en la dirección de $\vec{v}$. ~~Esta~~ Dos lados del rectángulo proyectado tienen la misma longitud que en el original, pero los otros dos disminuyen en un factor de $\cos\phi$, por lo que el área proyectada $A_\perp$ es igual a $A\cos\phi$. Tasa de flujo volumétrico:



$$\frac{dV}{dt} = vA\cos\phi$$

→Si $\phi = 90°$, $dV/dt = 0$; el alambre rectangular presenta su borde al flujo, por lo que ningún fluido pasa a trávés suyo. Asimismo, $v\cos\phi$ es la componente del vector $\vec{v}$ perpendicular al plano del área A.

Si se llama $v_\perp$ a esta componente, la tasa de flujo volumétrico queda así:

$$\frac{dV}{dt} = v_\perp A$$

Flujo volumétrico como producto escalar

$$\frac{dV}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{A}$$

...Flujo de un campo eléctrico uniforme...

- Se sustituye la velocidad del fluido por el campo eléctrico $\vec{E}$.
- Símbolo flujo eléctrico es Φ_E (fi)
- Área plana A, perpendicular a un campo eléctrico uniforme. Se define el flujo eléctrico a través de esta área como el producto de la magnitud del campo E por el área A:

$$\Phi_E = EA$$

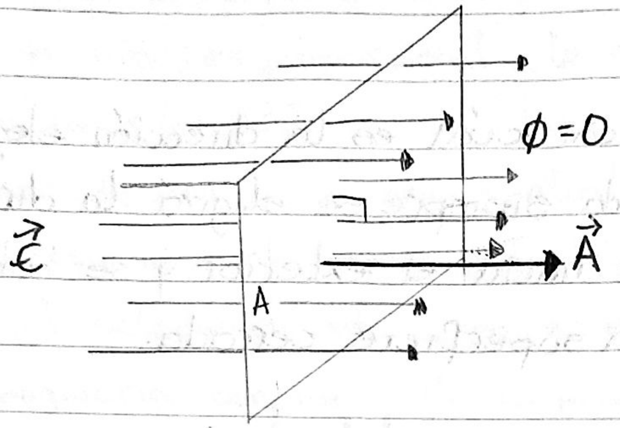
- El incremento del área significa que más líneas de $\vec{E}$ cruzan el área, aumentando el flujo.
- Campo más intenso, más densidad de líneas $\vec{E}$, más líneas por unidad de área, incrementando el flujo
- Flujo eléctrico para un campo eléctrico uniforme

S. Plana

$$\Phi_E = EA\cos\phi$$
$$\Phi_E = E_\perp A$$
$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

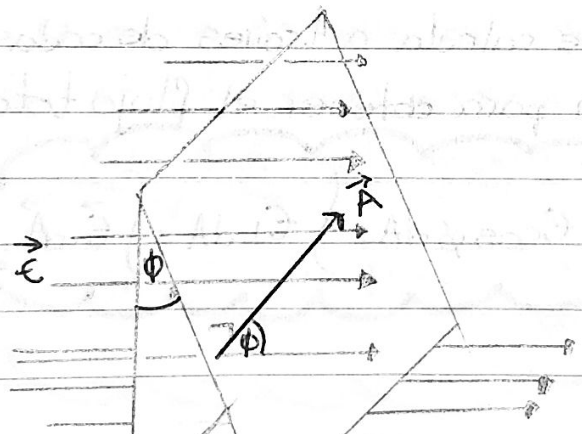
a) La superficie está de frente al campo eléctrico:

- $\vec{E}$ y $\vec{A}$ son paralelos (ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A}$ es $\phi = 0$
- El flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA$



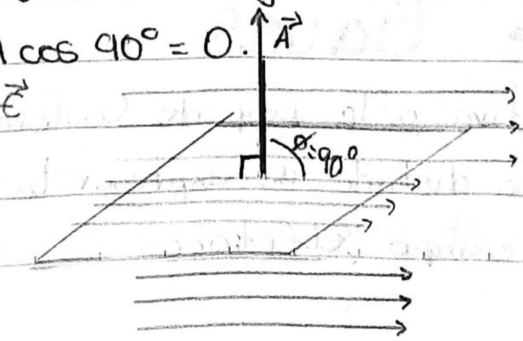
b) La superficie esta inclinada un ángulo ϕ respecto de la orientación de frente:

- El ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A}$ es ϕ
- El flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA\cos\phi$



C) La superficie está de canto en relación con el campo eléctrico

- $\vec{E}$ y $\vec{A}$ son perpendiculares (el ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A}$ es $\phi = 90°$).
- El flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA\cos 90° = 0$.



→ Unidad del SI para el flujo eléctrico es $1 N \cdot m^2/C$.
→ La dirección de un vector de área se puede representar con $\vec{A}$ empleando un vector unitario $\hat{n}$ perpendicular al área; $\hat{n}$ significa "normal".

$$\vec{A} = A\hat{n}$$

→ Siempre se debe especificar cuál es la dirección elegida.
→ Con la superficie ~~de~~ cerrada siempre se eligirá la dirección de $\hat{n}$ como la que se dirige hacia el exterior y se hablará del flujo hacia fuera de una superficie cerrada.

Flujo de un campo eléctrico no uniforme...

→ Se divide A en muchos elementos pequeños dA, cada uno de los cuales tiene un vector unitario $\hat{n}$ perpendicular a él, y un vector de área $d\vec{A} = \hat{n}\, dA$.
→ El flujo eléctrico se calcula a tráves de cada elemento y los resultados se integran para obtener el flujo total:

$$\Phi_E = \int E\cos\phi\, dA = \int E_\perp\, dA = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

→ Integral de superficie de la componente $E_\perp$ en el área

→ El flujo eléctrico $\int E_\perp\, dA$ es igual al valor medio de la componente perpendicular del campo eléctrico, multiplicado por el área de superficie.

Ley de Gauss

Es una alternativa a la Ley de Coulomb.
Ofrece una forma distinta de expresar la relación entre la carga eléctrica y el campo eléctrico.

Carga puntual dentro de una superficie esférica

La Ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a tráves de cualquier superficie cerrada (una superficie que encierra un volumen definido) es proporcional a la carga eléctrica total (neta) dentro de la superficie.

→ Campo de una sola carga puntual positiva q: Las líneas de campo se extienden en forma radial hacia fuera en todas direcciones por igual. Colocamos esta carga en el centro de una superficie esférica imaginaria con radio R. La magnitud E del campo eléctrico en cada punto de la superficie está dada por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2}$$

En cada punto de la superficie, $\vec{E}$ es perpendicular a ésta, y su magnitud es la misma en todos los puntos.

→ El flujo eléctrico total es el producto de la magnitud del campo E por el área total $A = 4\pi R^2$ de la esfera:

$$\Phi_E = EA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}(4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

→ El flujo es independiente del radio R de la esfera; solo depende de la carga q encerrada por la esfera.

→ Lo que se cumple para toda la esfera se cumple para cualquier región de su superficie.

Carga puntual dentro de una superficie no esférica

→ Considere un pequeño elemento de área dA sobre la superficie irregular. Si una normal a dA forma un ángulo ϕ con una línea radial que sale de q, dos lados del área proyectada sobre la superficie esférica es igual al flujo $E\,dA\cos\phi$ a través del correspondiente elemento de superficie irregular.

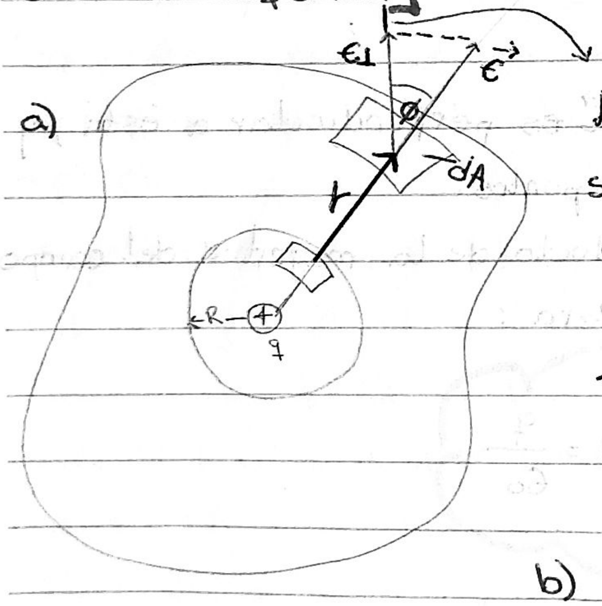
Se puede dividir toda la superficie irregular en elementos dA, calcular para cada uno de ellos el flujo eléctrico $E\,dA\cos\phi$, y sumar los resultados por integración, como en la ecuación.

Para la superficie irregular.

$$\boxed{\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

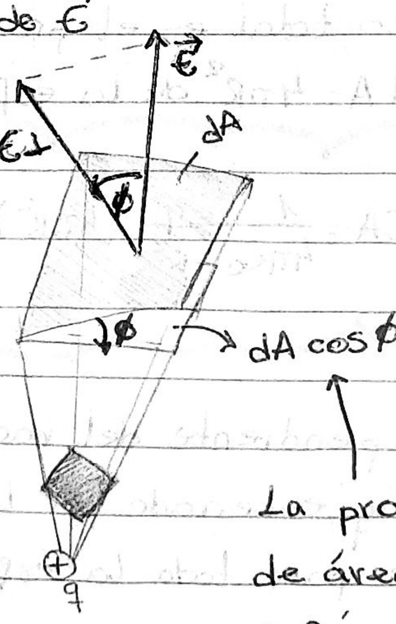
[Cálculo del flujo eléctrico que pasa a través de una superficie no esférica]

a)



La normal hacia fuera con respecto a la superficie forma un ángulo ϕ con la dirección de $\vec{E}$

b)

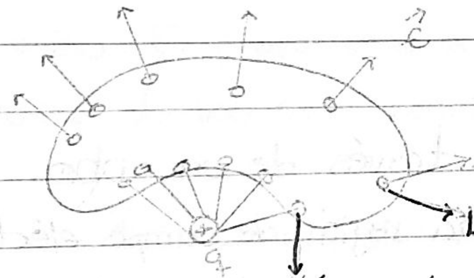


La proyección del elemento de área dA sobre la superficie esférica es dA cos ϕ

→ Se cumple para una superficie de cualquier forma o tamaño, siempre y cuando sea una superficie cerrada que contenga la carga q.
→ Círculo en el signo de la integral recuerda que la integral siempre se toma sobre una superficie cerrada.
→ Para una superficie cerrada que no encierre carga.

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

Éste es un enunciado matemático que indica que cuando una región no contiene carga, cualquier línea de campo producida por una carga afuera de la región y que entran por un lado han de salir por el otro.
→ Las líneas de campo eléctrico comienzan o terminan dentro de una región del espacio sólo cuando en esa región existe carga.



La misma línea de campo abandona la sup.

Línea de campo que enta a la superficie.

...Forma general de la ley de Gauss...

→ El campo eléctrico total $\vec{E}$ en cualquier punto es la suma vectorial de los campos $\vec{E}$ de las cargas individuales.
→ Enunciado general de la ley de Gauss.

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

→ El flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es igual a la carga eléctrica total dentro de la superficie, dividida entre ϵ_0

$$\Phi_E = \oint E\cos\phi \, dA = \oint E_\perp dA = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

→ Superficie gaussiana alrededor de una carga positiva (flujo +) $\phi = 0$

$$\Phi_E = \oint E_\perp \, dA = \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

→ Superficie gaussiana alrededor de una carga negativa (flujo −) $\phi = 180°$

$$\Phi_E = \oint E_\perp \, dA = \oint \left(\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) dA = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{-q}{\epsilon_0}$$

→ Las cargas en el exterior no contribuyen al flujo total a través de la superficie

→ Cuando $Q_{enc} = 0$, el flujo total a través de la superficie gaussiana debe ser igual a cero, aunque ciertas áreas tengan flujo positivo y otras flujo negativo.

Ejemplos 22.2 Flujo eléctrico a través de un cubo.

Un cubo de arista L está situado en una región de campo eléctrico uniforme $\vec{E}$. Determine el flujo eléctrico que pasa a través de cada cara del cubo y el flujo total a través de éste cuando:

a) el cubo está orientado con dos de sus caras perpendiculares al campo $\vec{E}$, como se ilustra en la fig. 22.8a

b) cuando el cubo se gira un ángulo θ, como en la fig. 22.8b

• Identificar: en este problema se va a determinar el flujo eléctrico a través de cada cara del cubo y el flujo total (la suma de los flujos que pasan por las seis caras).

• Plantear: Como $\vec{E}$ es un uniforme y cada una de las seis caras del cubo es una superficie plana, se encuentran el flujo que cruza cada cara con las ecuaciones (22.3) y (22.4) Después se calcula el flujo total a través del cubo sumando los seis flujos individuales.

• Ejecutar: a) En la fig se ilustran los vectores unitarios para cada cara ($\hat{n}_1$ a $\hat{n}_6$); la dirección de cada vector unitario es hacia fuera des de la superficie cerrada del cubo. El ángulo entre $\vec{E}$ y $\hat{n}_1$ es de 180°; el ángulo entre $\vec{E}$ y $\hat{n}_2$ es de 0°; y el ángulo entre $\vec{E}$ y cada uno de los otros cuatro vectores unitarios es de 90°. Cada cara del cubo tiene un área de L^2, por lo que los flujos a través de cada una de las caras son los siguientes:

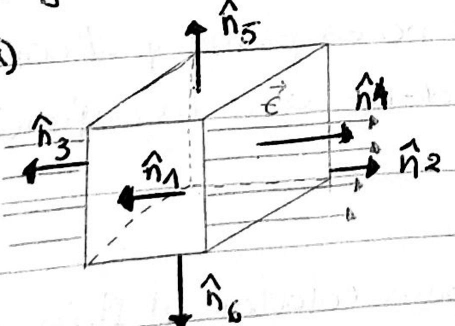
$$\Phi_{E1} = \vec{E} \cdot \hat{n}_1 A = EL^2 \cos 180° = -EL^2$$
$$\Phi_{E2} = \vec{E} \cdot \hat{n}_2 A = EL^2 \cos 0° = +EL^2$$
$$\Phi_{E3} = \Phi_{E4} = \Phi_{E5} = \Phi_{E6} = EL^2 \cos 90° = 0.$$

El flujo es negativo en la cara 1, donde $\vec{E}$ está dirigido hacia el cubo, y positivo en la cara 2, en la que $\vec{E}$ se dirige hacia fuera del cubo. El flujo total a través del cubo es la suma de los flujos a través de los seis caras:

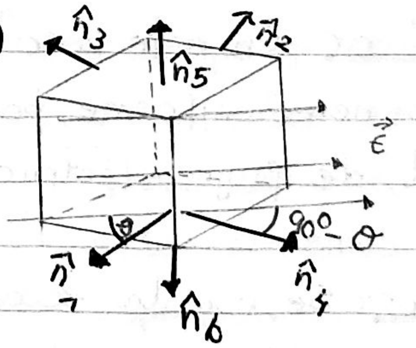
$$\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_5 + \Phi_{E6} = -EL^2 + EL^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0.$$

22.8 : Flujo eléctrico de un campo uniforme $\vec{E}$ a través de una caja cúbica con artista L en dos orientaciones.

a)



b)



b) Los flujos a través de las caras 1 y 3 son negativos, ya que $\vec{E}$ está dirigido hacia esas caras; el campo se dirige hacia fuera de las caras 2 y 4, por lo que los flujos a través de esas caras son positivos. Se tiene que

$$\Phi_{E1} = \vec{E} \cdot \hat{n}_1 A = EL^2 \cos(180° - \theta) = -EL^2 \cos\theta$$

$$\Phi_{E2} = \vec{E} \cdot \hat{n}_2 A = +EL^2 \cos\theta$$

$$\Phi_{E3} = \vec{E} \cdot \hat{n}_3 A = EL^2 \cos(90° + \theta) = -EL^2 \operatorname{sen}\theta$$

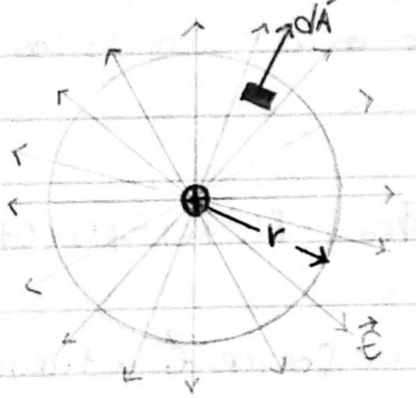
$$\Phi_{E4} = \vec{E} \cdot \hat{n}_4 A = EL^2 \cos(90° - \theta) = +EL^2 \operatorname{sen}\theta$$

$$\Phi_{E5} = \Phi_{E6} = EL^2 \cos 90° = 0$$

El flujo total $\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6}$ a través de la superficie del cubo es, de nuevo, igual a cero.

Ejemplo 22.3 Flujo eléctrico a través de una esfera:

Una carga puntual positiva $q = 3{,}0\,\mu C$ está rodeada por una esfera centrada en la carga y cuyo radio mide 0,20 m. Determine el flujo eléctrico a través de la esfera debido a esta carga



Flujo eléctrico a través de una esfera centrada en una carga puntual.

· **Identificar**: En este caso la superficie no es plana y el campo eléctrico no es uniforme, por lo que se debe usar la definición general de flujo eléctrico.

· **Plantear**: Se usa la ecuación (22.5) para calcular el flujo eléctrico (la variable que se busca). Como la esfera está centrada en la carga puntual, en cualquier punto sobre la superficie de la esfera, $\vec{E}$ está dirigido hacia el exterior en forma perpendicular a la superficie. La dirección positiva tanto para $\hat{n}$ como para $E_\perp$

es hacia el exterior, por lo que $E_\perp = E$ y el flujo a través del elemento de superficie dA es $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot d\vec{A}$. Esto simplifica en gran medida la integral en la ecuación (22.5).

En cualquier punto de la esfera, la magnitud de $\vec{E}$ es

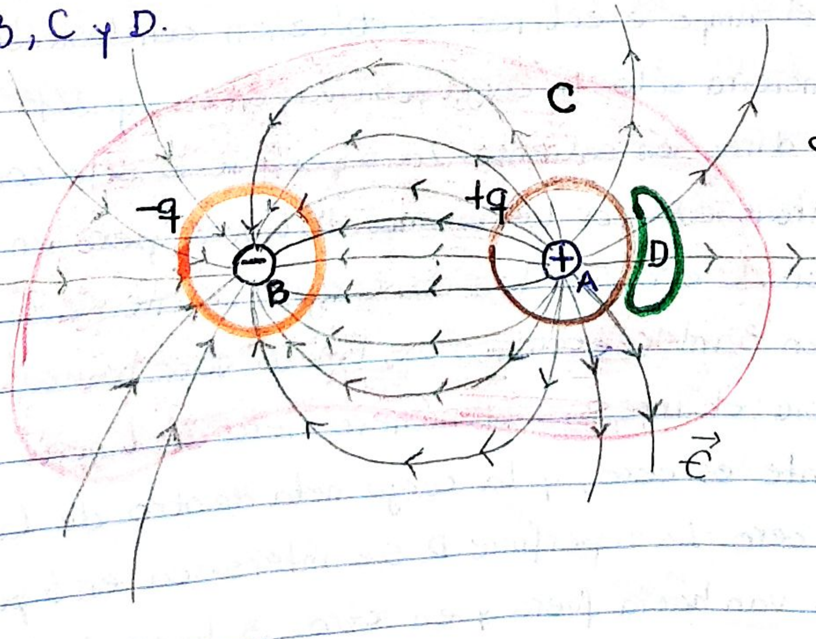
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = (9{,}0 \times 10^{9}\ N \cdot m^2/C^2)\frac{3{,}0 \times 10^{-6}\ C}{(0{,}20\ m)^2} = 6{,}75 \times 10^{5}\ N/C$$

Puesto que E es igual en todos los puntos, se puede sacar de la integral $\Phi_E = \int E\,dA$ de la ecuación (22.5); lo que resta es la integral $\int dA$, que es el área total $A = 4\pi r^2$ de la superficie esférica. Así, el flujo total que sale de la esfera es:

$$\Phi_E = EA = (6{,}75 \times 10^{5}\ N/C)(4\pi)(0{,}20\ m)^2 = 3{,}4 \times 10^{5}\ N \cdot m^2/C$$

Ejemplo conceptual 22.4 Flujo eléctrico y carga encerrada

La fig. 22.15 muestra el campo producido por dos cargas puntuales $+q$ y $-q$ de igual magnitud y signos opuestos (un dipolo eléctrico. Determine el flujo eléctrico a través de cada una de las superficies cerradas A, B, C y D.



El número neto de líneas de campo que salen de una superficie cerrada es proporcional a la carga total contenida por la superficie

La definición de flujo eléctrico dada en la ecuación (22.5) implica que se necesita resolver una integral de superficie, por lo que quizá parezca que se necesita resolver una integral. Pero la Ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es igual a la carga total encerrada dividida entre ϵ_0. Por la inspección de la fig. 15, la superficie A encierra la carga positiva, por lo que $Q_{enc} = +q$; la superficie B contiene la carga negativa, de manera que $Q_{enc} = -q$; la superficie C encierra las dos cargas, y tiene $Q_{enc} = +q + (-q) = 0$; y la superficie D, no encierra cargas y también tiene $Q_{enc} = 0$. De manera que sin resolver ninguna integral podemos concluir que los flujos totales para las diversas superficies son $\Phi_E = +q/\epsilon_0$ para la superficie A, $\Phi_E = -q/\epsilon_0$ para la B, y $\Phi_E = 0$ tanto para la superficie C como la D.

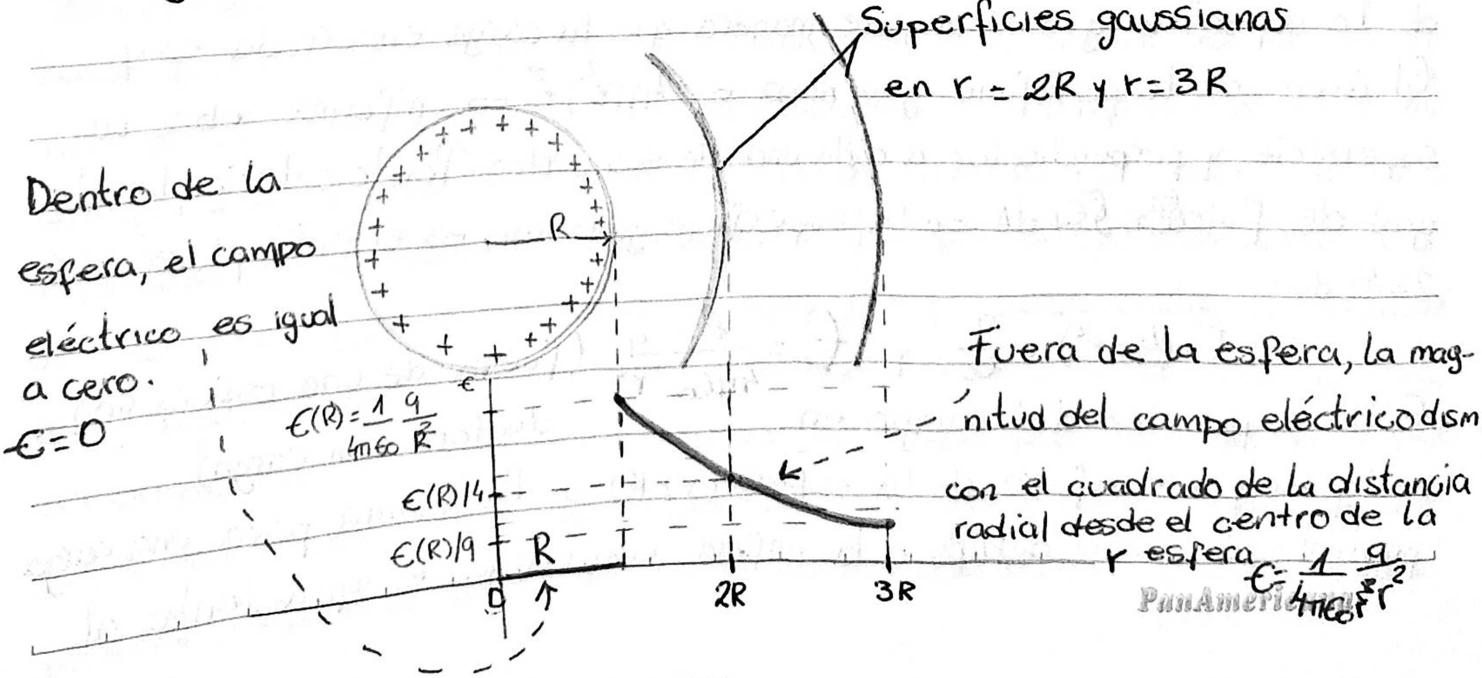
Estos resultados dependen sólo de las cargas encerradas dentro de cada superficie gaussiana, no de las formas específicas de la superficies. Por ejemplo, compare la superficie C con la superficie rectangular que se muestra en la figura 22.3b, que también encierra las dos cargas en un dipolo eléctrico. En ese caso también se concluyó que el flujo neto de $\vec{E}$ era igual a cero; el flujo hacia el interior en una parte de la superficie compensaba con exactitud el flujo hacia afuera en el resto de la superficie. Al examinar las líneas del campo eléctrico se obtienen conclusiones similares. La superficie A encierra sólo la carga positiva; en la fig. 22.15 hay 18 líneas que cruzan A en dirección saliente. La superficie B sólo contiene la carga negativa; está atravesada por las mismas 18 líneas, pero en dirección entrante. La superficie C encierra las dos cargas. Se intersecan con líneas en 16 puntos; en 8 intersecciones las líneas van hacia el exterior, y en otras 8 hacia el interior. El número neto de líneas que cruzan en dirección saliente es cero, y la carga neta dentro de la superficie también es igual a cero. La superficie D se interseca en 6 puntos, en 3 de los cuales las líneas van hacia fuera y en otros 3 hacia dentro. El número neto de líneas que cruzan hacia el exterior y la carga total encerrada son iguales a cero. Hay puntos sobre las superficies en los que $\vec{E}$ no es perpendicular a la superficie, pero esto no afecta el conteo de las líneas de campo.

Ejemplo 22.5 Campo de una esfera conductora con carga.

Se coloca una carga positiva q en una esfera conductora sólida de radio R. Determine $\vec{E}$ en cualquier punto en el interior o en el exterior de la esfera.

- Identificar: como se vio en esta sección, toda la carga debe encontrarse en la superficie de la espera. El sistema tiene simetría esférica.
- Plantear: Para aprovechar la simetría, se toma la superficie gaussiana como una esfera imaginaria de radio r con centro en el conductor. Para calcular el campo afuera del conductor, se toma r de forma que sea mayor que el radio R del conductor; para obtener el campo en el interior, se toma r menor que R. En cualquier caso, el punto en que se desea calcular $\vec{E}$ queda sobre la superficie gaussiana.

Cálculo del campo eléctrico de una esfera conductora con carga positiva $+q$. Fuera de la esfera, el campo es el mismo que si toda la carga estuviera concentrada en el centro de la esfera.



El papel de la simetría merece atención especial antes de hacer cualquier cálculo. Decir que el sistema tiene simetría esférica significa que si se hace girar con cualquier ángulo alrededor de cualquier eje que pase por el centro, después de la rotación, el sistema es indistinguible del original antes del giro. La carga es libre de moverse en el conductor y no hay nada en este último que la haga tender a concentrarse más en ciertas regiones que en otras. Por lo tanto, se concluye que la carga está distribuida de manera uniforme sobre la superficie.

La simetría también muestra que la dirección del campo eléctrico debe ser radial, como se ilustra en la fig 22.18. Si el sistema se gira otra vez, la disposición del campo debe ser idéntica al original. Si el campo tuviera una componente en algún punto que fuera perpendicular a la dirrección radial, esa componente tendría que ser distinta después de hacer al menos algunas rotaciones. Entonces, no puede haber tal componente y el campo debe ser radial. Por la misma razón, la magnitud E del campo sólo puede depender de la distancia r desde el centro y debe tener el mismo valor en todos los puntos de una superficie esférica concéntrica respecto de la esfera conductora. La elección de una esfera como superficie gaussiana aprovecha estas propiedades de simetría. En primer lugar se considera el campo fuera del conductor, por lo que se elige $r > R$. Todo el conductor se encuentra dentro de la superficie gaussiana, de manera que la carga encerrada es q. El área de la superficie gaussiana es $4\pi r^2$; $\vec{E}$ es uniforme sobre la superficie y perpendicular a cada uno de sus puntos. Por lo anterior, la integral de flujo $\oint E_\perp dA$ en la superficie gaussiana es $E(4\pi r^2)$ y la ecuación 22.8 da:

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad y \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$ (fuera de una esfera conductora con carga)

Esta expresión del campo en cualquier punto afuera de la esfera ($r > R$) es la misma para una carga puntual; el campo debido a la esfera con carga es equivalente al data / /

S T Q Q S S D

que habría si toda la carga estuviera concentrada en su centro. Inmediatamente afuera de la superficie de la esfera, donde $r = R$,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}$$ (en la superficie de una esfera conductora con carga)

Para calcular $\vec{E}$ dentro del conductor, se usa una superficie gaussiana esferica con radio $r < R$. De nuevo, la simetría esférica dice que $E(4\pi r^2) = Q_{enc}/\epsilon_0$. Pero como toda la carga está en la superficie del conductor, la superficie gaussiana (que está por completo dentro del conductor) no encierra ninguna carga, por lo que $Q_{enc} = 0$, y el campo eléctrico en el interior del conductor es igual a cero.

Ejemplo 22.6 Campo de una carga lineal

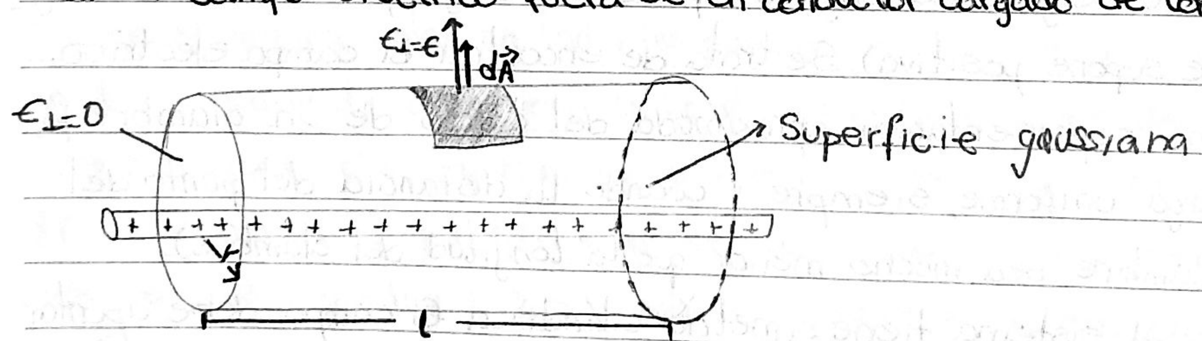
Una carga eléctrica está distribuida de manera uniforme a lo largo de un alambre delgado de longitud infinita. La carga por unidad de longitud es λ (se supone positiva). Se trata de encontrar el campo eléctrico. (Ésta es una representación aproximada del campo de un alambre finito con carga uniforme, siempre y cuando la distancia del punto del campo al alambre sea mucho menor que la longitud del alambre).

- Identificar: el sistema tiene simetría cilíndrica. El campo debe apuntar hacia fuera de las cargas positivas. Para determinar la dirección de $\vec{E}$ con más precisión, así como demostrar el modo en que su magnitud depende de la posición, se usa la simetría, como se hizo en el ejemplo 22.5.
- Plantear: la simetría cilíndrica significa que el sistema puede girarse cualquier ángulo alrededor de su eje y desplazarse cualquier distancia a lo largo del eje; en cada caso el sistema resultante es indistinguible del original. Por lo tanto, $\vec{E}$ no cambia en ningún punto cuando se efectúa cualquiera de esas operaciones. El campo no puede tener ninguna componente paralela al conductor; si la tuviera habría que explicar porqué

las Líneas del campo que comienzan en el alambre apuntan en una dirección paralela al alambre y no en la otra. Asimismo, el campo no puede tener ninguna componente tangente a un círculo en un plano perpendicular al alambre con su centro en el alambre. Si así fuera, sería necesario explicar por qué la componente señala en una dirección alrededor del conductor y no en la otra. Todo lo que queda es una componente radial hacia afuera del conductor en cada punto. Por lo tanto, las líneas de campo afuera de un alambre infinito con carga uniforme son radiales y se localizan en planos perpendiculares al alambre. La magnitud del campo sólo depende de la distancia radial desde el alambre.

Estas propiedades de simetría sugieren que, como superficie gaussiana se utiliza un cilindro con radio arbitrario r y longitud arbitraria l, con sus extremos perpendiculares al conductor.

Se emplea una superficie gaussiana cilíndrica coaxial para encontrar el campo eléctrico fuera de un conductor cargado de longitud infinita



Se descompone la integral de superficie para el flujo Φ_E en una integral sobre cada extremo plano y otra sobre las paredes laterales curvas. A través de los extremos no hay flujo, ya que $\vec{E}$ se encuentra en el plano de la superficie y $E_\perp = 0$. Para calcular el flujo a través de las paredes laterales, hay que observar que $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie en cada ~~plano~~ punto, por lo que $E = E_\perp$; por simetría, E tiene el mismo valor en cualquier lugar de las paredes. El área de las paredes laterales es $2\pi rl$. De ahí que el flujo total Φ_E a través de todo el cilindro sea igual a la suma del flujo a través de las paredes laterales, que es $(E)(2\pi rl)$

y el flujo a través de los dos extremos es de cero. Por último, se necesita la carga total encerrada, que es la carga por unidad de longitud multiplicada por la longitud del alambre dentro de la superficie gaussiana, o $Q_{enc} = \lambda l$. De acuerdo con la Ley de Gauss, la ecuación (22.8) es

$$\Phi_e = (E)(2\pi r l) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad y \quad E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r}\frac{\lambda}{r}$$ → (Campo de una línea infinita de carga)

Éste es el mismo resultado que se obtuvo en el ej. 21.11. por medios mucho más laboriosos.

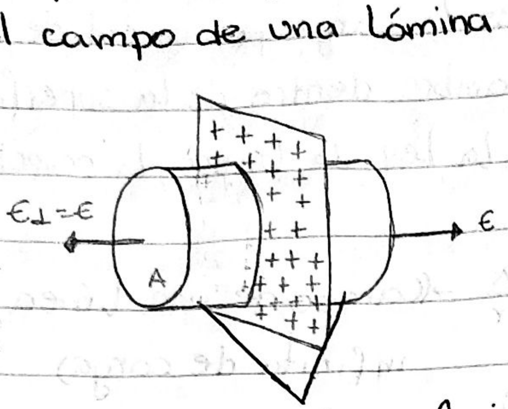
Se ha supuesto que λ es positiva. Si fuera negativa, $\vec{E}$ estaría dirigido radialmente hacia el interior, en dirección de la línea de carga, y en la expresión anterior de la magnitud del campo E se debería interpretar λ como la magnitud (valor absoluto) de la carga por unidad de longitud

Ejemplo 22.7 Campo de una lámina plana de infinita cargada.

Encuentre el campo eléctrico que genera una lámina delgada, plana e infinita, en la que hay una carga uniforme positiva por unidad de área σ.

- Identificar: El campo debe apuntar hacia fuera de la lámina con carga positiva. Igual que en los ejemplos 22.5 y 22.6, antes de hacer los cálculos se emplea la simetría (en este caso, simetría plana) para obtener más datos sobre la dirección de $\vec{E}$ y su dependencia de la posición.
- Plantear: La simetría plana significa que la distribución de carga no cambia si hay un movimiento en cualquier dirección paralela a la lámina, de lo que se concluye que $\vec{E}$ es perpendicular a la lámina. La simetría también dice que el campo debe tener la misma magnitud E a cualquier distancia dada en cualquier lado de la lámina.

Superficie gaussiana cilíndrica que se utiliza para encontrar el campo de una lámina plana infinita cargada.



Superficie gaussiana.

Para aprovechar estas propiedades de la simetría se usa un cilindo como superficie gaussiana, con su eje perpendicular a la lámina de carga, con extremes de área A.

La lámina con carga pasa a través de la mitad de la longitud del cilindro, por lo que los extremos del cilindro son equidistantes con respecto a la lámina. En cada extremo del cilindro, $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie y $E_\perp$ es igual a E; de ahí que el flujo a través de cada extremo sea $+EA$.

Como $\vec{E}$ es perpendicular a la lámina con carga, es paralelo a las paredes laterales curvas del cilindro, por lo que $E_\perp$ es igual a cero en las paredes y no hay flujo que las atraviese. Así, la integral de flujo total en la ley de Gauss es $2EA$ (EA de cada extreme y cero de las paredes laterales). La carga neta dentro de la superficie gaussiana es la carga por unidad de área multiplicada por el área de lámina encerrada por la superficie, o $Q_{enc} = \sigma A$. De ahí que la ley de Gauss

$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad y \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{(campo de una lámina infinita cargada)}$$

El campo es uniforme y está dirigido perpendicularmente al plano de la lámina. Su magnitud es independiente de la distancia a lámina, por lo que las líneas de campo son rectas y paralelas entre sí, pero perpendiculares a la lámina.

Si la densidad de carga es negativa, $\vec{E}$ está dirigido hacia la lámina, el flujo a través de la superficie gaussiana en la fig. 22.20 es negativo y σ en la expresión $E = \sigma/2\epsilon_0$ denota la magnitud de la densidad de carga.

Ejemplo 22.8 Campo entre láminas conductoras paralelas y con cargas opuestas.

Dos placas conductoras paralelas, grandes y planas tienen cargas de igual magnitud pero con signo contrario; la carga por unidad de área es $+\sigma$ para una y $-\sigma$ para la otra. Determine el campo eléctrico en la región entre las placas.

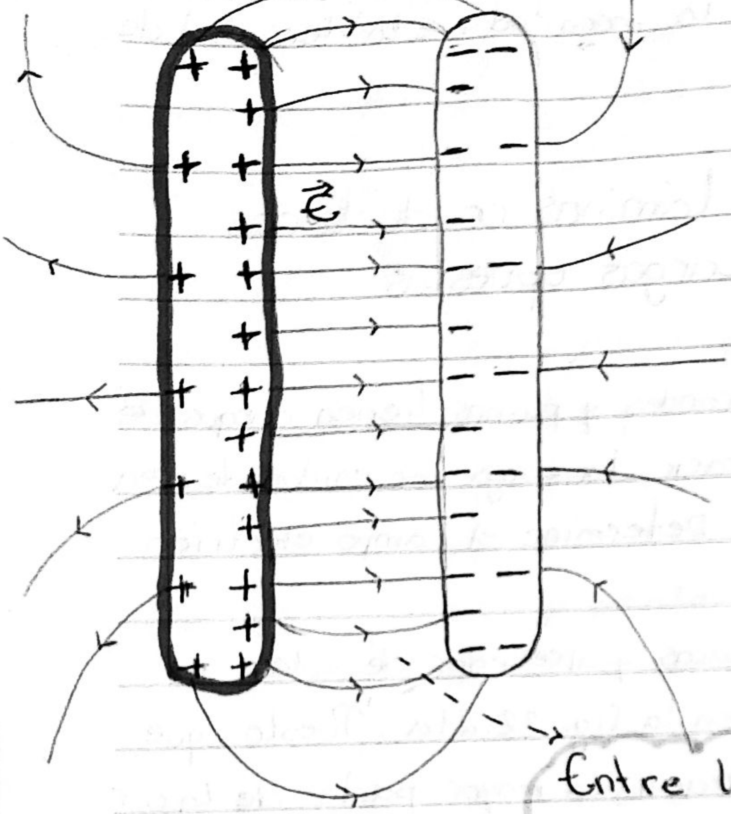
• Identificar: el campo entre las placas y alrededor de estás es aproximadamente el que se ilustra en la fig 22.21a. Puesto que las cargas opuestas ~~(interiores)~~ se atraen, la mayor parte de la carga se acumula en las cargas opuestas (interiores) de las placas. Una pequeña cantidad de cargas reside en las superficies exteriores de las placas, y en sus extremos hay alguna dispersión del campo.

Pero si las placas son muy grandes en comparación con la distancia que los separa, la cantidad de cargas en las superficies exteriores se vuelve despreciable por pequeña, y la dispersión se ignora excepto cerca de los extremos. En este caso se puede suponer que el campo es uniforme en la región interior entre las placas, como se ilustra en la fig. 22.21b, y que las cargas están distribuidas de manera uniforme en las superficies opuestas.

• Plantear: Para aprovechar está simetría se emplean las superficies gaussianas sombreadas S_1, S_2, S_3 y S_4, que son cilindros con extremos de área A como el que se ilustra en perspectiva en la fig 22.20, y en vista lateral en la fig 22.21 b. Un extremo de cada superficie está dentro de las placas conductoras.

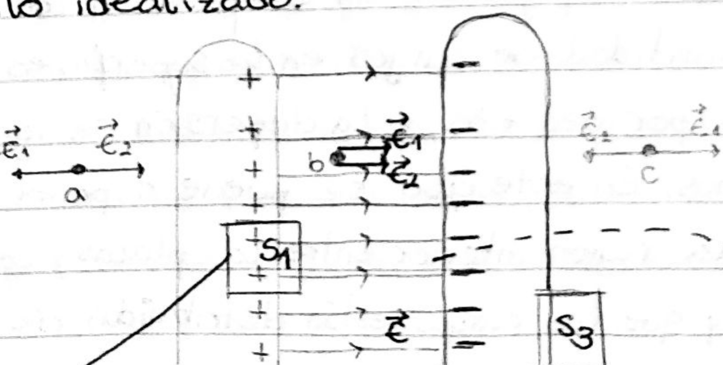
Campo eléctrico entre placas paralelas con cargas opuestas.

a) Dibujo, realista.



Entre las dos placas el campo eléctrico es casi uniforme y apunta de la placa positiva hacia la negativa.

b) Modelo idealizado.



Superficies gaussianas cilíndricas (vista lateral)

En el caso idealizado se ignoran las "pestañas" en los bordes de las placas y se trata al campo como si fuera uniforme

· Ejecutar: Para la superficie S_1, el extremo izquierdo está dentro de la placa 1 (positiva). Como en condiciones electrostáticas el campo dentro de cualquier sólido conductor es igual a cero, no hay flujo eléctrico a través de ese extremo. El campo eléctrico entre las placas es perpendicular al extremo derecho, por lo que en ese extremo $E_\perp$ es igual a E y el flujo es EA; éste es positivo porque $\vec{E}$ está dirigido fuera de la superficie gaussiana. A través de las paredes laterales del cilindro no hay flujo, pues son paralelas a $\vec{E}$. Así que el flujo total en la ley de Gauss es EA. La carga neta encerrada por el cilindro es σA, por lo que la ecuación (22.8) da:

$$EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$ (campo entre placas conductoras con cargas opuestas).

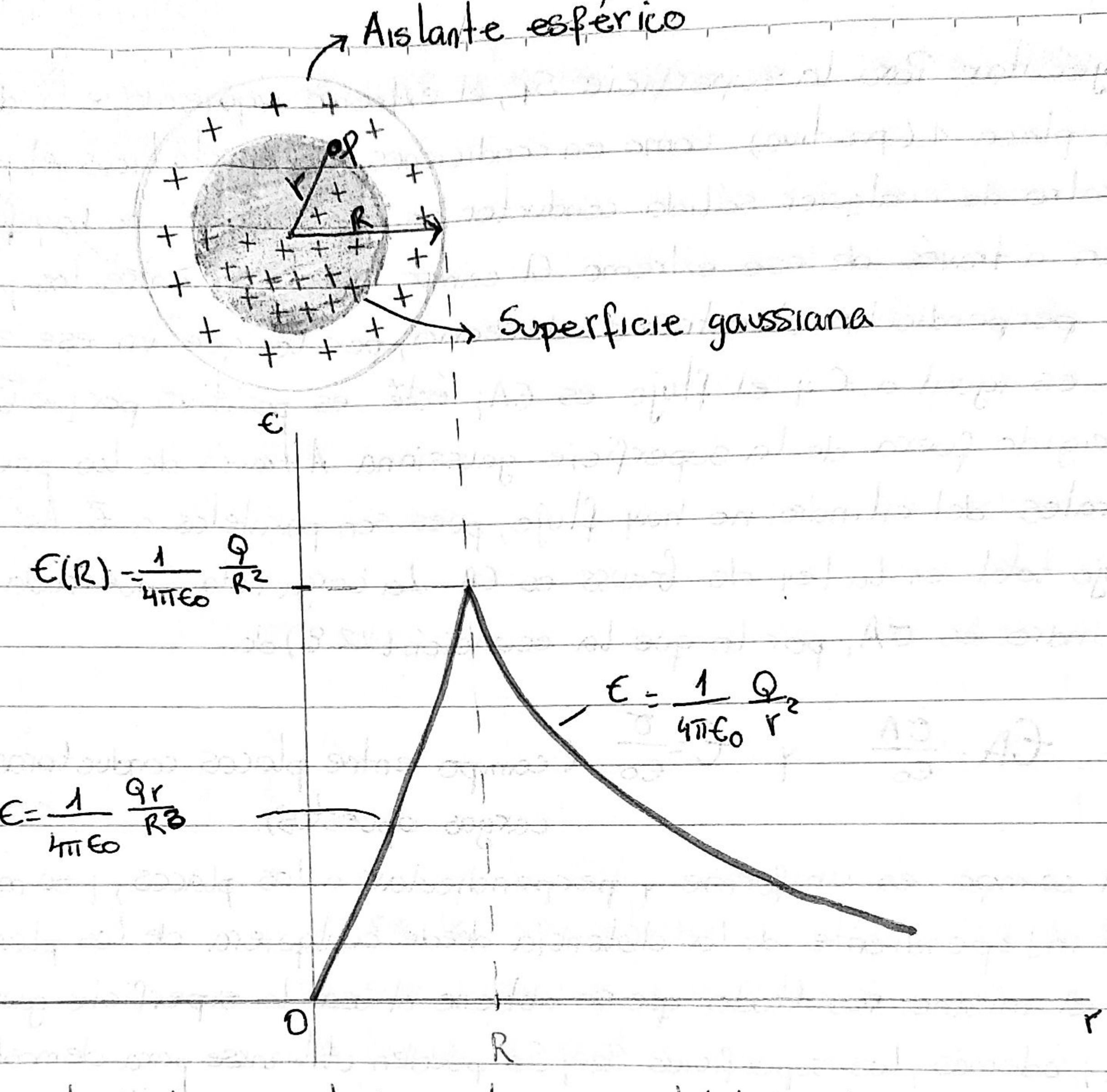
El campo es uniforme y perpendicular a las placas, y su magnitud es independiente de la distancia desde cualquiera de las placas. Este es el mismo resultado que se obtiene al usar la superficie gaussiana S_4; además, las superficies S_2 y S_3 pueden utilizarse para demostrar que $E=0$ a la izquierda de la placa 1 y a la derecha de la placa 2.

Ejemplo 22.9 Campo de una esfera con carga uniforme.

Una carga eléctrica positiva Q está distribuida de manera uniforme en todo el volumen de una esfera aislante con radio R. Encuentre la magnitud del campo eléctrico en el punto P a una distancia r del centro de la esfera.

· Identificar: como se vio en el ejemplo 22.5, el sistema tiene simetría esférica, por lo que se pueden usar las conclusiones de ese ejemplo acerca de la dirección y la magnitud de $\vec{E}$

· Plantear: para emplear la simetría se elige como superficie gaussiana una esfera con radio r, concéntrica con la distribución de la carga.



Por simetría, la magnitud E del campo eléctrico tiene el mismo valor en todos los puntos de la superficie gaussiana, y la dirección de $\vec{E}$ es radial en cada uno de ellos, por lo que $E_\perp = E$. Así, el flujo eléctrico total a través de la superficie gaussiana es el producto de E por el área total de la superficie $A = 4\pi r^2$, es decir, $\Phi_E = 4\pi r^2 E$. La cantidad de carga encerrada por la superficie gaussiana depende del radio r. Primero se calcula la magnitud del campo dentro de la esfera con carga de radio R; la magnitud E se evalua en el radio de la superficie gaussiana, por lo que se elige $r > R$. La densidad volumetrica de carga ρ es la carga Q dividida entre el volumen de la esfera con carga de radio R:

$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^3/3}$$

El volumen Venc por la superficie gaussiana es $4/3\pi r^3$, por lo que la carga total Qenc contenida por la superficie es.

$$Q_{enc} = \rho V_{enc} = \left(\frac{Q}{4\pi R^3/3}\right)\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = Q\frac{r^3}{R^3}$$

Con lo que la Ley de Gauss, se convierte

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}\frac{r^3}{R^3} \quad \text{o bien} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr}{R^3}$$ (campo ~~con~~ dentro de una esfera con carga uniforme).

La magnitud del campo es proporcional a la distancia r que hay entre el punto del campo y el centro de la esfera. En el centro ($r=0$) $E=0$. Para ~~cualquier~~ calcular la magnitud del campo fuera de la esfera con carga se utiliza una superficie gaussiana esférica de radio $r>R$. Esta superficie encierra la totalidad de la esfera con carga, por lo que $Q_{enc}=Q$, y la ley de Gauss da:

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{o bien} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$ (campo dentro de una esfera con carga uniforme).

Para cualquier cuerpo esférico simétrico con carga, el campo eléctrico en su exterior es el mismo que si todo el cuerpo estuviera concentrado en el centro.

La fig. 22.22 presenta una gráfica de E como función de r para este problema. Para $r<R$, E es directamente proporcional a r, y para $r>R$, E varía según $1/r^2$. Si la carga es negativa y no positiva, $\vec{E}$ va radialmente hacia dentro y Q se interpreta como la magnitud (valor absoluto) de la carga.

Ejemplo 22.10 Campo de una esfera hueca con carga.

Una esfera hueca de pared delgada y radio de 0,250 m tiene una cantidad desconocida de carga distribuida de manera uniforme en su superficie.

A una distancia de 0,800 m desde el centro de la esfera, el campo eléctrico apunta directamente hacia el centro de la esfera y su magnitud es de $1,80 \times 10^{2}$ N/C ¿Cuánta carga hay en la esfera?

- La distribución de carga tiene simetría esférica. Igual que en los ejemplos 22.5 y 22.9, se deduce que el campo eléctrico es radial en todo lugar, y su magnitud es función sólo de la distancia radial r desde el centro de la esfera.
- Se utiliza otra vez una superficie esférica gaussiana concéntrica con la distribución de carga y que pase por el punto de interés en $r = 0,300$ m
- La distribución de carga es igual que si la carga estuviera sobre la superficie de una esfera conductora de 0,250 m de radio. Por ello es posible usar los resultados del ejemplo 22.5. Una diferencia clave con ese ejemplo es que como aquí el campo eléctrico está dirigido hacia la esfera, la carga debe ser negativa. Además, como el campo eléctrico se dirige hacia la superficie gaussiana, $E_{\perp} = -E$ y el flujo es $\oint E_{\perp} dA = -E(4\pi r^2)$.

Según la ley de Gauss, el flujo es igual a la carga q en la esfera (toda ella encerrada por la superficie de Gauss) dividida entre ϵ_0. Al despejar q se obtiene lo siguiente:

$$q = -E(4\pi\epsilon_0 r^2) = -(1,80 \times 10^{2}\ N/C)(4\pi) \times (8,854 \times 10^{-12}\ C^2/N \cdot m^2)(0,300 m)^2$$
$$= -8,01 \times 10^{-10}\ C = -0,801\ nC$$

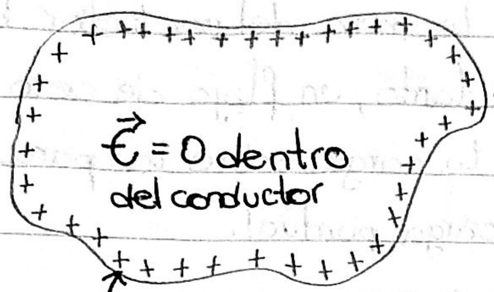
Cargas en Conductores

→ Si no hay carga dentro de la cavidad se puede utilizar una superficie gaussiana como A (que está por completo dentro del material del conductor) para demostrar que la carga neta en la superficie de la cavidad debe ser igual a cero, ya que $\vec{E} = 0$ en todo lugar de la superficie gaussiana.

S T Q Q S S D

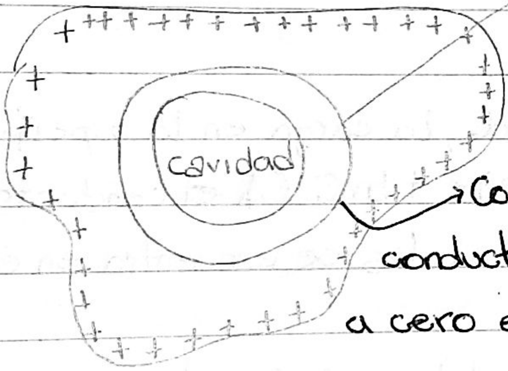
→ Cálculo del campo eléctrico dentro de un conductor con carga.

a) Conductor sólido con carga q_C



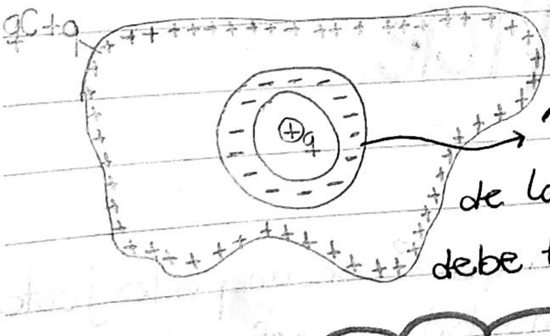
La carga q_C reside por completo en la superficie del conductor. La situación es electrostática, por lo que $\vec{E} = 0$ dentro del conductor.

b) El mismo conductor con una cavidad interna



Como $\vec{E} = 0$ en todos los puntos dentro del conductor, el campo eléctrico debe ser igual a cero en todos los puntos de la superficie gaussiana

c) Se coloca en la cavidad una carga aislada q.

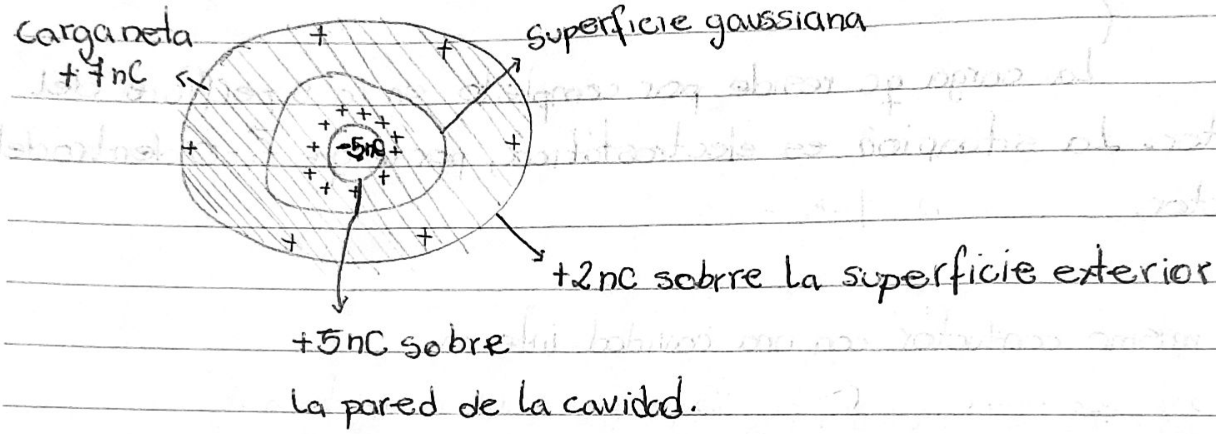


Para que $\vec{E}$ sea igual a cero en todos los puntos de la superficie gaussiana, la superficie de la cavidad debe tener una carga total de $-q$.

Ejemplo conceptual 22.11 Conductor con una Cavidad.

Un conductor sólido con una cavidad tiene una carga total de +7 nC. Dentro de la cavidad, aislada del conductor, hay una carga puntual de −5 nC. ¿Cuánta carga hay en cada superficie (interna y externa) del conductor?

Ilustración del problema: Dentro de la masa del conductor hay un campo eléctrico igual a cero y, por lo tanto, un flujo de cero através de la superficie gaussiana, por lo que la carga sobre la pared de la cavidad debe ser la opuesta de la carga puntual.



Si la carga en la cavidad es $q = -5nC$, la carga en la superficie de la cavidad interna debe ser $-q = -(-5nC) = +5nC$. En el conductor lleva una carga total de +7nC, ninguno de los cuales se encuentra en el interior del material.

Si en la superficie interna de la cavidad hay +5 nC, entonces en la superficie externa del conductor debe haber $(+7nC) - (+5nC) = +2nC$.

Campo en la superficie de un Conductor

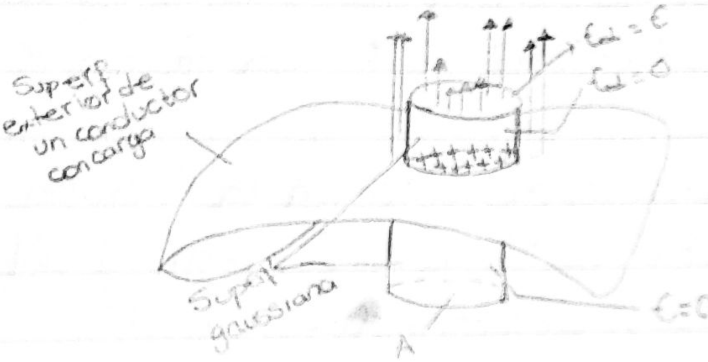
→ Hay una relación directa entre el campo $\vec{E}$ en un punto justo afuera de cualquier conductor y la densidad superficial de carga σ en ese punto.

→ La dirección de $\vec{E}$ siempre es perpendicular a la superficie

$$E_{\perp} A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad E_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$ (campo en la superf. de un conductor).

→ ~~Esto se puede~~

El campo inmediatamente afuera de un conductor con carga es perpendicular a la superficie, y su componente perpendicular $E_{\perp}$ es igual a σ/ϵ_0.



Ejemplo conceptual 22.12 Campo en la superficie de una esfera conductora

Compruebe la ecuación (22.10) para una esfera conductora de radio R y carga total q.

En el ej. 22.5 (sección 22.4) se demostró que el campo eléctrico inmediatamente afuera de la superficie es:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

La densidad superficial de carga uniforme e igual a q dividida entre el área superficial de la esfera:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

Al comparar estas dos expresiones se observa que $E = \sigma/\epsilon_0$, como se plantea en la ecuación (22.10).

Ejemplo 22.13 Campo eléctrico de la Tierra

La Tierra (un conductor) tiene una carga eléctrica neta. El campo eléctrico resultante cerca de la superficie puede medirse con instrumentos eléctronicos sensibles; su valor medio es de alrededor de 150 N/C, dirigido hacia el centro de la Tierra.

a) ¿Cuál es la densidad superficial de carga correspondiente?

b) ¿Cuál es la carga superficial total de la Tierra?

- Se da la magnitud del campo eléctrico en la superficie de la Tierra conductora, y se pide calcular la densidad superficial de carga en toda la superficie terrestre.

- Dado el campo eléctrico perpendicular, se determina la densidad superficial de carga σ con la ecuación (22.10). La carga superficial total en la Tierra es el producto de σ por el área de la superficie terrestre.

a) De la dirección del campo se sabe que σ es negativa (lo que corresponde a $\vec{E}$ dirigido hacia la superficie, por lo que $E_\perp$ es negativa)

$$\sigma = \epsilon_0 E_\perp = (8{,}85 \times 10^{-12}\, C^2/N\cdot m^2)(-150\, N/C) = -1{,}33\times 10^{-9}\, C/m^2 = -1{,}33\, nC/m^2$$

b) El área de la superficie de la Tierra es $4\pi R_E^2$, donde $R_E = 6{,}38\times 10^6 m$ es el radio terrestre. La carga total Q es el producto $4\pi R_E^2 \sigma$, o

$$Q = 4\pi(6{,}38\times 10^6\, m)^2(-1{,}33\times 10^{-9}\, C/m^2) = -6{,}8\times 10^5 C = -680\, kC.$$

... LEY DE GAUSS ...

Ejemplo 1: Flujo eléctrico a tráves de un disco

Un disco con radio de 0,10 m se orienta con su vector unitario normal $\hat{n}$ con un ángulo de 30° respecto de un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ con magnitud de $2,0 \times 10^3$ N/C. (Como ésta no es una superficie cerrada, no tiene un interior ni un exterior; por eso se tiene que especificar la dirección de $\hat{n}$ en la figura.

a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través del disco?

b) ¿Cuál sería el flujo que cruzaría el disco si se girara de manera que su normal fuera perpendicular a $\vec{E}$?

c) ¿Cuál sería el flujo que pasaría a tráves del disco si su normal fuera paralela a $\vec{E}$?

Solución: este problema es sobre una superficie plana en un campo eléctrico uniforme.

La orientación del disco es como la del rectángulo en la fig. 22.6b.

El flujo se calcula con la ecuación 22.1.

a) El área es $A = \pi(0,10 m)^2 = (0,0314\ m^2)$~~(cos 30°)~~

Ángulo $= A\hat{n}$ es $\phi = 30°$

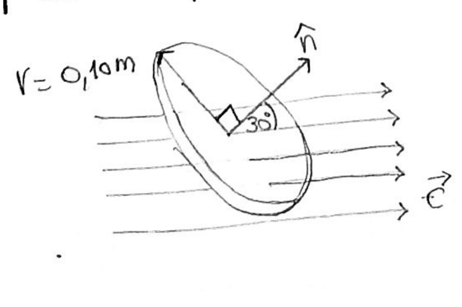
$\Phi_E = EA\cos\phi = (2,0 \times 10^3 N/C)(0,0314\ m^2)(\cos 30°) = 54\ N \cdot m^2/C$

b) Ahora la normal al disco es perpendicular a $\vec{E}$, de manera que $\phi = 90°$, $\cos\phi = 0$ y $\Phi_E = 0$ A tráves del disco no hay flujo.

c) La normal al disco es paralela a $\vec{E}$, por lo que $\phi = 0$, $\cos\phi = 1$, y el flujo tiene su valor máximo posible.

$\Phi_E = EA\cos\phi = (2,0 \times 10^3 N/C)(0,0134\ m^2)(1) = 63\ N\ m^2/C$

El flujo eléctrico Φ_E a través de un disco depende del ángulo entre su normal $\hat{n}$ y el campo eléctrico $\vec{E}$!



Evalúe su comprensión:

1. Si todos los dimensiones de la caja de la fig. 22.2a se incrementan en un factor de 3, ¿qué efecto tendría este cambio en el flujo eléctrico a través de la caja?

i) El flujo sería $3^2 = 9$ veces mayor.

ii) El flujo sería 3 veces más grande

iii) El flujo permanecería sin cambio

iv) " " sería de $(1/3)$

v) " " " $(1/3)^2 = 1/9$

vi) No hay información suficiente para decidir

R: Cada elemento de la superficie de la caja estará tres veces más lejos de la carga $+q$, por lo que el campo eléctrico será $(1/3)^2 = 1/9$ de la intensidad. Pero el área de la caja se incrementará en un factor de $3^2 = 9$. De ahí que el flujo eléctrico será multiplicado por un factor de $1/9(9) = 1$. En otras palabras el flujo no cambiara.

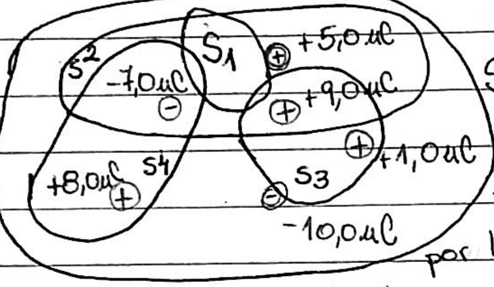
2. Ordene las siguientes superficies del flujo más positivo al más negativo.

i) Una superficie rectangular plana con vector de área $\vec{A} = (6{,}0\,m^2)\hat{\imath}$ en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (4{,}0\,N/C)\hat{\jmath}$; ii) una superficie circular plana con vector de área $\vec{A} = (3{,}0\,m^2)\hat{\jmath}$ en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (4{,}0\,N/C)\hat{\imath} + (2{,}0\,N/C)\hat{\jmath}$; iii) una superficie cuadrada plana con vector de área $\vec{A} = (3{,}0\,m^2)\hat{\imath} + (7{,}0\,m^2)\hat{\jmath}$ en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (4{,}0\,N/C)\hat{\imath} - (2{,}0\,N/C)\hat{\jmath}$; iv) una superficie oval plana con vector de área $\vec{A} = (3{,}0\,m^2)\hat{\imath} - (7{,}0\,m^2)\hat{\jmath}$ en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (4{,}0\,N/C)\hat{\imath} - (2{,}0\,N/C)\hat{\jmath}$.

R: iv - ii - i - iii. En cada caso, el campo eléctrico es uniforme, por lo que el flujo es: $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$. Se usan las relaciones para los productos escalares de vectores unitarios: $\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = 1$

3. En la figura 22.16 se ilustran seis cargas puntuales que están en el mismo plano. Hay cinco superficies gaussianas $-S_1, S_2, S_3, S_4, S_5-$ que encierran, cada una, parte de este plano y la fig. 22.16 presenta la intersección de cada superficie con el plano. Clasifique los cinco superficies en orden del flujo eléctrico que pasa a través de ellas, del más positivo al más negativo.

R: S_2, S_5, S_4, S_1 y S_3 (empate)



La ley de Gauss afirma que el flujo a través de una superficie cerrada es proporcional a la cantidad de carga encerrada dentro de esa superficie por lo que ordenar estas superficies según sus flujos es lo mismo que hacerlo según la cantidad de carga que encierran. La S_1 no encierra carga, la S_2 encierra $9{,}0\,\mu C + 5{,}0\,\mu C + (-7{,}0\,\mu C) = 7{,}0\,\mu C$, S_3 encierra $9{,}0\,\mu C + 1{,}0\,\mu C + (-10{,}0\,\mu C) = 0$, S_4 encierra $8{,}0\,\mu C + (-7{,}0\,\mu C) = 1{,}0\,\mu C$, y S_5 encierra $8{,}0\,\mu C + (-7{,}0\,\mu C) + (-10{,}0\,\mu C) + (1{,}0\,\mu C) + (9{,}0\,\mu C) + (5{,}0\,\mu C) = 6{,}0\,\mu C$

4. Se coloca una cantidad conocida de carga Q en el conductor de forma irregular que se ilustra en la fig. 22.17. Si se conoce el tamaño y la forma del conductor, ¿es posible emplear la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico en una posición arbitraria fuera del conductor? NO. Tal vez usted estuviera tentado a dibujar una superficie gaussiana que fuera una versión grande del conductor, con la misma forma y colocada de manera que lo encerrara por completo. Si bien se conoce el flujo a través de esta superficie gaussiana (según la ley de Gauss es $\Phi_E = Q/\epsilon_0$), la dirección del campo eléctrico no necesita ser perpendicular a la superficie y tampoco es necesario que la magnitud del campo sea la misma en todos los puntos de la superficie. No es posible realizar la integral del flujo $\oint E_\perp dA$, por lo que no se puede calcular el campo eléctrico. La ley de Gauss es útil para obtener el campo eléctrico sólo cuando la distribución de carga es muy simétrica.

5. Una esfera conductora hueca carece de carga neta. En el centro de la cavidad esférica dentro de la esfera hay una carga puntual positiva q. Se conecta un alambre conductor entre el exterior de la esfera y el terreno. ¿Se medirán un campo eléctrico fuera de la esfera? NO. Antes de conectar el alambre con la esfera, la presencia de la carga puntual inducirá una carga -q en la superficie interior de la esfera hueca y una carga q en la superficie interior de la esfera hueca y una carga q en la superficie exterior (La carga neta en la esfera es igual a cero). Habrá un campo eléctrico fuera de la esfera que se debe a la carga en la superficie exterior. Sin embargo, una vez que el alambre conductor toque la esfera, los electrones fluirán de la Tierra a la superficie exterior de la esfera para neutralizar la carga ahí presente. Como resultado, la esfera no tendrá carga en su superficie externa, ni tampoco campo eléctrico en el exterior.